REMARQVES GÉNÉRALES

SUR LE

MOUVEMENT DIURNE DES PLANETES

PAR M. EULER.

Table III. Après la découverte de la véritable préceſſion des équinoxes, & de la nutation de l'axe de la terre, on répreſente en ſorte le mouvement diurne de la terre, que pendant qu'elle tourne uniformement autour de ſon axe, cet axe même ait un certain mouvement, par lequel il réponde ſucceſſivement à differens points du Ciel: & l'on a dreſſé des tables à l'aide desquelles on calcule pour chaque tems propoſé, tant la longitude des poles de la terre que leur diſtance aux poles de l'écliptique.

Cette maniere d'enviſager le mouvement diurne de la terre paroit d'abord la plus naturelle & la plus convenable pour la pratique: & on aura de la peine à s'imaginer qu'elle ſoit aſſujettie à de fort grandes difficultés, non pas à l'égard des petites irrégularités de ce mouvement, lesquelles peut-être ne ſont pas encore toutes connues, mais à l'egard de la maniere même de concevoir ce mouvement.

Car d'abord je demande, qu'eſt-ce que l'axe de la terre? On me répondra bien, que c'eſt une certaine ligne droite qui paſſe par le centre, ou plutôt le centre de gravité de la terre, autour de laquelle la terre acheve ſes révolutions. Quelque claire que paroiſſe cette définition, j'y trouve de fort grandes difficultés: car comment eſt-ce que nous connoiſſons cette ligne qu'on nomme l'axe de la terre? On recourra au Ciel, où, l'on dira, qu'on découvre toujours deux points diamétralement oppoſés, qui ſemblent du moins pour quelque tems être en repos, & autour

tour desquels le Ciel avec les étoiles nous paroit achever ſes révolutions. On nomme ces points les poles de la terre, & la droite tirée de l'un à l'autre, entant qu'elle paſſe par le centre de la terre, ſon axe. Je ne m'arrêterai pas ici à l'objection qu'on pourroit tirer de la diſtance des étoiles, que l'on peut bien regarder comme infinie, même par rapport au diametre de l'orbite de la terre. Je conviens plutôt, que quel que ſoit le mouvement de la terre, il y a toujours au Ciel deux points en repos, qui ſemblent immobiles pour un inſtant au moins. Or, puisque ces points ſont variables, on ſuppoſe gratuitement, que la ligne droite tirée de l'un à l'autre paſſe toujours par les mêmes points de la terre: & ſi cela n'arrivoit pas, les poles terreſtres ne ſeroient pas des points fixes ſur la ſurface de la terre, comme on le ſoutient. Mais il y a plus; ces points fixes du Ciel ne repondent pas à l'axe prétendu de la terre. Car, puisque cet axe eſt ſuppoſé mobile, les points au Ciel, vers lesquels il eſt dirigé, le ſeront auſſi; & partant on ne ſauroit dire qu'ils ſont ces points fixes du Ciel, autour desquels le Ciel tourne au moins pendant un inſtant. Il eſt vrai que le mouvement de l'axe de la terre eſt ſi lent, qu'on peut le regarder pendant longtems comme immobile: & c'eſt auſſi la raiſon, pourquoi l'incongruité dont je parle ici, n'eſt d'aucune conſéquence. Mais, pour mettre cette matiere dans tout ſon jour, concevons une autre Planete, qui tourne comme la terre autour d'un certain axe; mais que cet axe lui même ait un mouvement beaucoup plus rapide, de ſorte que les points du Ciel vers lesquels cet axe eſt dirigé, changent tous les inſtans aſſés ſenſiblement de place: & il eſt évident qu'on ne ſauroit ſoutenir, que le Ciel tourne autour de ces points pendant un ſeul inſtant.

Voudra-t-on inſiſter ſur le mot d'inſtant, & dire que, quelque rapide que ſoit le mouvement desdits points dans le Ciel, on les peut pourtant regarder comme fixes pendant un inſtant, & y rapporter le mouvement angulaire du Ciel, attendu que pendant un inſtant ces points ne changent pas de place. Mais on pourroit dire la même choſe de tous les autres points du Ciel avec autant de fondement; & on réduiroit par ce moyen le Ciel tout entier au repos, quelque ra-

pide que fût ſon mouvement. D'ailleurs la raiſon alléguée, qu'on puiſſe regarder un point en repos pendant un inſtant, quoiqu'il ſoit en mouvement, eſt tout à fait fauſſe: car il ne s'agit pas ici du changement de place, qui évanouit toujours dans un inſtant, quelque rapide que ſoit le mouvement, mais du véritable repos, du moins pendant un inſtant; puiſqu'on ſait que la viteſſe ne dépend pas du tems. Donc, quand on dit que les points autour desquels le Ciel tourne, ſont fixes pendant un inſtant; on ne veut pas dire qu'ils ne changent pas de place, mais que leur viteſſe eſt effectivement nulle. Or un tel repos ne convient pas abſolument aux points du Ciel, vers leſquels eſt dirigé l'axe mobile de quelque planete: & partant, ſi nous jugeons du mouvement diurne d'une planete par le mouvement apparent du Ciel, qui ſe fait toujours autour d'un axe fixe pendant un inſtant, il eſt certain que cet axe du Ciel ne convient pas avec l'axe mobile de la planete, autour duquel on conçoit qu'elle tourne, & que cette maniere de repréſenter le mouvement diurne des Planetes n'eſt pas d'accord avec les Obſervations du Ciel, d'où l'on détermine la poſition & le mouvement de leurs axes.

Or l'idée même d'un corps qui tourne autour d'un axe, pendant que cet axe ſe meut d'un mouvement quelconque, eſt aſſujettie à de grandes difficultés, qu'on rencontre même en ne conſidérant les choſes qu'*in abſtracto*. Car, ſoit QRST un corps ſphérique qui tourne autour d'un axe, qui paſſe par ſon centre & le point P, pendant que ce point P, qu'on nommera ſon pole, eſt emporté par un mouvement quelconque, le centre demeurant toujours en repos. Que ce pole ſoit maintenant en P, autour duquel concevons un cercle ABCD, ou plutôt quatre points A, B, C, D; & en quelque endroit O que le pole P ſoit transporté, il s'agit de déterminer les lieux où ces quatre points ſe trouveront alors, tant à cauſe du mouvement de rotation autour de ce pole, qu'à cauſe du mouvement propre du pole. Car il eſt clair, que la connoiſſance de ce mouvement compoſé exige la poſition de ces quatre points pour tous les endroits O, où le pole P parvient ſucceſſivement.

Fig. 1.

Or,

Or, quelque aiſée que paroiſſe cette queſtion, en ſuppoſant connu, tant le mouvement du pole P, que la viteſſe angulaire du corps autour de ce pole pour chaque tems propoſé; pour peu qu'on y réfléchiſſe, on y rencontrera des obſtacles inſurmontables. Nous n'avons qu'à en conſidérer le cas le plus ſimple, où le mouvement de rotation eſt ſuppoſé nul: & il n'y a point de doute que, quand le pole P ſeroit transporté en Q, après avoir parcouru le quart de cercle PQ, les quatre points A, B, C, D ne ſe trouvent aux points *a*, *b*, *c*, *d*, marqués dans la figure. Mais, par la même raiſon, ſi le pole P étoit transporté en R par l'arc de cercle PR, les points A, B, C, D, devroient ſe trouver en α, β, γ, δ: & ſi le pole paſſoit de R en Q, les points α, β, γ, δ, parviendroient en *b*, *c*, *d*, *a*, dont la poſition eſt tout à fait différente de celle que ces points auroient, ſi le pole P étoit transporté en Q par l'arc PQ; quoique dans l'un & l'autre cas le mouvement de rotation ſoit ſuppoſé nul. D'ailleurs la queſtion ne fournit aucune raiſon, pourquoi la poſition des points A, B, C. D, devroit être différente, ſelon que le pole ſeroit parvenu par différens chemins de P en Q. Il ne ſera donc pas poſſible d'aſſigner la poſition de ces quatre points, quand le pole P ſera parvenu à un lieu quelconque O: & à plus forte raiſon, la queſtion envelopera des incongruités, quand on ſuppoſe au corps un mouvement de rotation.

On peut même regarder cette queſtion comme indéterminée; & il y faudroit ajouter encore une condition, qui détermineroit le mouvement du corps au cas même, où le mouvement de rotation eſt ſuppoſé évanouïſſant. La moins choquante ſeroit à mon avis de dire que, dans ce cas, les points A, B, C, D, conſervaſſent conſtamment la même ſituation à l'égard de la direction, ſuivant laquelle le pole ſe meut à chaque inſtant. Cette condition conviendroit encore le mieux avec les idées que nous nous formons ſur l'abſence d'un mouvement de rotation, & expliqueroit la diverſe poſition desdits points, le pole étant parvenu en Q, ou par l'arc PQ, ou par le chemin PRQ. Mais il faut avouer que cette condition eſt tout à fait étrangere aux principes de la Mécanique. Cependant, en l'admettant, on eſt en état de déterminer

le vrai mouvement du corps, dès que celui du pole & celui de rotation ſeroient donnés pour chaque inſtant.

Mais, quoiqu'on voulût ſe ſervir de cette maniere pour repréſenter le mouvement d'une Planete ſur ſon centre, il n'y auroit rien qui nous obligeroit de regarder un point de la Planete comme ſon pole, plutôt que tout autre. Ainſi, lorsqu'il s'agit de la terre, on pourroit prendre un point quelconque de ſa ſurface pour ſon pole, & le vrai mouvement de ce point ſeroit le mouvement du pole. Enſuite, on pourroit concevoir pour chaque lieu de ce pole un certain mouvement de rotation, lequel joint au mouvement du pole produiroit le vrai mouvement de la terre. Il eſt vrai que cette repréſentation deviendroit pour la plûpart fort compliquée, quelque ſimple qu'on ſuppoſât le mouvement en lui-même; mais il faut avouer que cette idée ne contient rien, qui nous indique les points préférables à tous les autres, où l'on devroit placer les poles. On dira bien qu'il eſt raiſonnable de choiſir ceux qui ſont aſſujettis au plus petit mouvement; mais cette regle n'eſt pas eſſentielle au ſujet, & quoiqu'il y ait de tels points ſur la terre, on a lieu de douter encore, ſi les autres planetes ſont douées de tels points. Peut-être que, quand même il y auroit de tels points pour un certain tems, ces mêmes points acquerroient dans la ſuite un mouvement plus rapide que d'autres.

Or ces inconvéniens n'ont pas lieu dans l'autre maniere de repréſenter le mouvement diurne des planetes, en déterminant pour chaque tems les points du Ciel autour desquels la Planete tourne, du moins pendant un inſtant, comme autour de points fixes; & en aſſignant pour chaque inſtant la viteſſe de cette rotation. Pour mieux comprendre cette maniere, & pour en voir la diverſité d'avec la précédente, concevons encore un corps ſphérique, (car la figure ne change rien dans notre recherche,) qui ſoit entouré d'une ſurface ſphérique immobile pour pouvoir y rapporter le mouvement du corps. Qu'il tourne au commencement autour du point A; & après un
Fig. 2. tems $= t$ autour du point P de la ſurface immobile, de ſorte qu'on puiſſe pour chaque moment aſſigner le point de la ſurface immobile,

autour

autour duquel le corps tourne alors avec la viteſſe de rotation. Ce n'eſt donc pas le point du corps A, qui parvient après le tems t en P, mais P eſt plutôt un point imaginaire dans la ſurface immobile, qui repréſente le pole de rotation pour un inſtant. Or, quoiqu'un moment après la rotation ſe faſſe autour du point p, il ne faut pas s'imaginer que le point P ait été tranſporté en p, l'un & l'autre demeurant fixe: ce qui diſtingue eſſentiellement cette maniere de la précédente.

Pour déterminer plus aiſément ce mouvement, concevons dans la ſurface immobile un point fixe Z, auquel on tire les arcs de grands cercles AZ, PZ & pZ. Et puiſqu'au commencement A eſt le pole de rotation, ſoit AZ $= a$. Enſuite, après le tems $= t$, le pole de rotation étant en P, ſoit l'angle AZP $= q$, & l'arc ZP $= p$, poſant le rayon de la ſphere $= 1$, de ſorte que p & q ſoient des fonctions du tems t; d'où pour le tems $t + dt$ on aura l'angle PZ$p = dq$, & l'arc Z$p = p + dp$. Pour la viteſſe angulaire, ſuppoſons qu'au commencement le pole étant en A, le corps tourne dans le tems infiniment petit dt par l'angle $= u\,dt$; & après le tems t, le pole étant en P, par l'angle $= v\,dt$. Cela poſé, voyons quel ſera le mouvement d'un point quelconque du corps, qui au commencement aura été en M.

Poſons donc l'arc AM $= f$, & l'angle ZAM $= g$; or, après le tems t, ce point ſoit parvenu en V, & nommons l'arc PV $= x$, & l'angle ZPV $= y$, qui ſont les deux quantités qu'il faut déterminer pour connoître le vrai mouvement du point M. Donc, puiſque le corps tourne autour du pole fixe P, pendant le tems dt, le point V ſera tranſporté en v, de ſorte que l'arc Pv $=$ PV $= x$, & l'angle VP$v = v\,dt$, par conſéquent l'angle ZP$v = y - v\,dt$. Or v ſera le lieu de notre point après le tems $t + dt$ depuis le commencement, le pole étant maintenant en p; & partant nous aurons $pv = x + dx$, & l'angle Z$pv = y + dy$.

Tirons de P ſur Zp, & de p ſur Pv, les perpendiculaires Pq & pr; & à cauſe de l'angle PZ$p = dq$ & ZP $= p$, nous aurons

pq

$pq = dp$ & $Pq = dq \sin p$. Donc, $Pp = V(dp^2 + dq^2 \sin p^2) = ds$ pour abréger: & de là $\sin pPq = \frac{dp}{ds}$, & $\cos pPq = \frac{dq \sin p}{ds}$. Or l'angle ZPq étant droit, nous aurons $\sin ZPp = \frac{dq \sin p}{ds}$ & $\cos ZPp = \frac{-dp}{ds}$. Maintenant, l'angle ZPv étant $= y - v\,dt$, ou en négligeant la particule infiniment petite $v\,dt$, seulement $= y$, on en tire $\sin pPr = \sin(y - ZPp) = \frac{-dp \sin y - dq \sin p \cos y}{ds}$, & $\cos pPr = \cos(y - ZPp) = \frac{-dp \cos y + dq \sin p \sin y}{ds}$,

Donc $pr = -dp \sin y - dq \sin p \cos y$ & $Pr = -dp \cos y + dq \sin p \sin y$, d'où nous concluons $pv = Pv - Pr$ ou $x + dx = x + dp \cos y - dq \sin p \sin y$, de sorte que nous ayons

$$dx = dp \cos y - dq \sin p \sin y.$$

De là nous connoitrons auſſi l'angle Pvp, puisque $pr = Pvp \sin pv$, ce qui donne $Pvp = \frac{-dp \sin y - dq \sin p \cos y}{\sin x}$.

Mais ces déterminations ne ſont pas ſuffiſantes pour définir l'angle $Zpv = y + dy$, & en tirer la valeur différentielle dy; car, puiſqu'il s'agit d'une différence infiniment petite, il ne ſera plus permis de négliger dans les angles Ppq & Ppr ces particules infiniment petites: mais, ſi nous en voulions tenir compte, nous tomberions dans des formules très embarraſſantes. Or le plus ſur moyen nous eſt fourni par ce beau théoreme ſur l'aire des triangles ſphériques, qui eſt toujours égale à l'excès des trois angles ſur deux droits, poſant le rayon de la ſphere $= 1$. Donc l'aire du quadrilatere $ZPvp$ eſt égale à l'excès de ſes quatre angles ſur 4 droits, dont la meſure eſt $= 2\pi$, prenant $\frac{1}{2}\pi$ pour

pour la meſure d'un angle droit. Or les quatre angles de cette figure ſont 1°. $PZp = dq$; 2°. $ZPv = y - v\,dt$; 3°. $Pvpz = \frac{-dp\,\sin y - dq\,\sin p\,\cos y}{\sin x}$ & 4°. $Zpv = 2\pi - y - dy$; & partant l'excès de leur ſomme ſur 4 droits ou, 2π, eſt

$$dq - v\,dt - \frac{dp\,\sin y - dq\,\sin p\,\cos y}{\sin x} - dy,$$

qui exprime l'aire de la figure. Mais on ſait que l'aire du triangle PZp eſt $= dq\,(1 - \cos p)$, & du triangle $Pvp = \frac{-(dp\,\sin y + dq\,\sin p\,\cos y)}{\sin x}(1 - \cos x)$; dont la ſomme étant égalée à l'expreſſion trouvée produit cette équation:

$$-v\,dt - dy = -dq\,\cos p + \frac{dp\,\sin y + dq\,\sin p\,\cos y}{\tang x}$$

d'où nous tirons

$$dy = -v\,dt + dq\,\cos p - \frac{dp\,\sin y + dq\,\sin p\,\cos y}{\tang x}.$$

Cette équation jointe à la premiere, qui eſt

$$dx = dp\,\cos y - dq\,\sin p\,\sin y;$$

contient la ſolution du probleme; où p, q & v, ſont regardés comme des fonctions du tems t.

Voilà donc deux équations différentielles, d'où il faut déterminer les deux inconnues x & y. La choſe reviendroit au même, ſi au lieu de ces deux inconnues on vouloit chercher l'angle AZV avec l'arc ZV; & alors on arrivera au but par la ſyntheſe ſuivante, qui eſt fort ſimple. Fig. 3.

Puisque $ZP = p$, $AZP = q$, & $VPv = v\,dt$, poſons l'angle $AZV = u$, & l'arc $ZV = z$, pour ſavoir l'angle $PZV = u - q$.

Tirons ſur Z V les perpendiculaires P R & $v s$, de même que l'arc V v, qui ſera perpendiculaire ſur les arcs égaux P V & P v, & nous aurons V $v = v\,dt$ ſin P V, & ſin P R = ſin Z P. ſin P Z V = ſin P V. ſin P V Z, de ſorte que ſin P V. ſin P V Z = ſin p ſin $(u - q)$. Or la Trigonométrie ſphérique donne

$$\text{tang } PVZ = \frac{\text{ſin } p \text{ ſin } (u - q)}{\text{cof } p \text{ ſin } z - \text{ſin } p \text{ cof } (u - q)}$$

Mais, puiſque V $s = -dz$, & V s = V v cof s V v = V v ſin P V Z, nous aurons d'abord

$$-dz = v\,dt \text{ ſin P V ſin P V Z} = v\,dt \text{ ſin } p \text{ ſin } (u - q)$$

Enſuite, à cauſe de V Z $v = du$, on aura $v s = du$ ſin z. Or $v s$ = V s cot P V Z, ou $-dz = du$ ſin z tang P V Z d'où nous tirons cette ſeconde équation:

$$-dz = \frac{du \text{ ſin } p \text{ ſin } z \text{ ſin } (u - q)}{\text{cof } p \text{ ſin } z - \text{ſin } p \text{ cof } z \text{ cof } (u - q)} = v\,dt \text{ ſin } p \text{ ſin } (u - q)$$

de ſorte que nous ayons ces deux équations

I. $o = dz + v\,dt$ ſin p ſin $(u - q)$

II. du ſin $z = v\,dt$ (cof p ſin z — ſin p cof z cof $(u - q)$)

Or ayant trouvé z & u, on en tire

cof P V = cof x = cof p cof z + ſin p ſin z cof $(u - q)$ &

$$\text{tang Z P V} = \text{tang } y = \frac{\text{ſin } z \text{ ſin } (u - q)}{\text{ſin } p \text{ cof } z - \text{cof } p \text{ ſin } z \text{ cof } (u - q)}$$

Puiſque le rapport de ces dernieres coordonnées u & z aux précedentes x & y eſt connu, ces dernieres formules ſe réduiſent aux premieres. Cependant il ne paroît pas, comment on puiſſe réſoudre en général ces équations, & pour des cas particuliers on ſe ſervira plus commodément, tantôt des unes, & tantôt des autres. Comme s'il n'y avoit aucun mouvement de rotation, ou qu'il fut $v = o$, les dernie-

dernieres formules montrent d'abord $dz = 0$, & $du = 0$; d'où l'on voit que dans ce cas tous les points du corps ne changent pas de place.

Conſidérons le cas où le pole P demeure en repos, quel que ſoit le mouvement de rotation vdt; ce qui arrive lorsque p & q ſont des quantités conſtantes: alors les premieres donnent d'abord $dx = 0$, & partant $x =$ conſt. Soit donc $x = f$, & l'autre $dy = -vdt$, & partant $y = g - fvdt$. Or les dernieres formules méneroient pour ce cas à un calcul fort ennuyeux.

Suppoſons, comme il arrive à peu prés ſur la terre, que le pole P ſe meut uniformement dans un petit cercle AP autour du point fixe Z, qui repréſente le pole de l'écliptique, & que le mouvement de rotation demeure toujours le même. On aura donc $p = a$; $dq = mdt$ & $v = n$; d'où les premieres formules donnent:

$$dx = -mdt \sin a \sin y \;\&\; dy = -ndt + mdt \cos a - \frac{mdt \sin a \cos y}{\text{tang } x}$$

& partant l'une diviſée par l'autre

$$\frac{dy}{dx} = \frac{n - m \cos a}{m \sin a \sin y} + \frac{1}{\text{tang } x \text{ tang } y}.$$

Multiplions par $dx \sin x \sin y$ pour avoir

$$dy \sin x \sin y - dx \cos x \cos y = \frac{n - m \cos a}{m \sin a} dx \sin x$$

dont l'intégrale eſt,

$$-\sin x \cos y = C + \frac{m \cos a - n}{m \sin a} \cos x.$$

Donc $$\cos y = \frac{(n - m \cos a) \cos x}{m \sin a \sin x} - \frac{h}{\sin x}.$$

Poſons pour abréger $\frac{n - m \cos a}{m \sin a} = k$, de ſorte que $\cos y = \frac{k \cos x - h}{\sin x}$

& $dy = -kmdt \sin a - \frac{mdt \sin a (k \cos x - h)}{\sin x \operatorname{tang} x}$, ou bien

$dy = \frac{-mdt \sin a (k - h \cos x)}{\sin x^2}$. Or la valeur de $\cos y$ donne

$dy \sin y = \frac{dx (k - h \cos x)}{\sin x^2}$; & cette valeur ſubſtituée mene à cette équation: $-mdt \sin a \sin y = dx$. Mais, à cauſe de

$$\sin y = \frac{+\sqrt{(\sin x^2 - kk \cos x^2 + 2hk \cos x - hh)}}{\sin x},$$

nous aurons: $mdt \sin a = \frac{-dx \sin x}{\sqrt{(1 - hh + 2hk \cos x - (1 + kk) \cos x^2)}}$.

dont l'intégrale ſe trouve

$$mt \sin a + C = \frac{1}{\sqrt{(1 + kk)}} \operatorname{Asin} \frac{(1 + kk) \cos x - hk}{\sqrt{(1 - hh + kk)}}.$$

& partant

$$\cos x = \frac{hk}{1 + kk} + \frac{\sqrt{(1 - hh + kk)}}{1 + kk} \sin (C + mt \sin a \sqrt{(1 + kk)})$$

Enſuite, ayant trouvé x pour le tems écoulé t, on aura

$$\cos y = \frac{k \cos x - h}{\sin x}, \text{ ayant poſé } k = \frac{n - m \cos a}{m \sin a}.$$

Pour déterminer les conſtantes h & C, ſupoſons qu'il y eût au commencement $x = AM = f$, & l'angle $y = ZAM = g$: donc $\cos g = \frac{k \cos f - h}{\sin f}$; & partant $h = k \cos f - \sin f \cos g$; d'où l'on obtient

$$\sqrt{(1 - hh + kk)} = \sqrt{(\sin g^2 + (k \sin f + \cos f \cos g)^2)}$$

Enſui-

Enſuite pour la conſtante C on aura:

$$\frac{(1+kk)\cos f - kk\cos f + k\sin f\cos g}{\sqrt{(\sin g^2+(k\sin f+\cos f\cos g)^2)}} = \sin C = \frac{\cos f + k\sin f\cos g}{\sqrt{(\sin g^2+(k\sin f+\cos f\cos g)^2)}}$$

Donc $\cos C = \frac{\sin f \sin g \sqrt{(1+kk)}}{\sqrt{(\sin g^2+(k\sin f+\cos f\cos g)^2)}}$, &

$$\text{tang } C = \frac{\cos f + k\sin f\cos g}{\sin f \sin g \sqrt{(1+kk)}}$$

Par conſéquent nous aurons:

$$\cos x = \frac{kk\cos f - \sin f\cos g + (\cos f + k\sin f\cos g)\cos\odot + \sin f\sin g\sin\odot.\sqrt{(1+kk)}}{1+kk}$$

poſant $mt \sin a. \sqrt{(1+kk)} = \odot$, & enſuite

$$\cos y = \frac{k\cos x - k\cos f + \sin f\cos g}{\sin x}$$

A' l'aide de ces deux formules on pourra déterminer le mouvement de chaque point du corps, qui ſera d'autant plus variable, plus les cöefficiens de $\sin\odot$ & $\cos\odot$ ſeront grands, qui dépendent du lieu du point M, dont on cherche le mouvement. Or on pourroit prendre un tel point, que ces cöefficiens évanouïſſent tous les deux; & alors, tant x que y, ſeront des quantités conſtantes; & ce point conſervera toujours la même ſituation par rapport au pole, autour duquel la planete tourne à chaque inſtant. Le mouvement de ce point ſera donc auſſi lent que le changement du pole, & paroitra délivré de toute rotation. Ce ſera donc le point, qu'on pourra regarder dans la premiere maniere comme le pole de la planete, ou la droite qui en eſt tirée par le centre, comme l'axe de la planete, quoique ce point ſoit toujours différent du point du Ciel autour duquel ſe fait la rotation à chaque inſtant.

Pour trouver donc ce point, ou l'axe de la Planete, on n'a qu'à prendre f & g en ſorte que tang $\sin f \sin g$ que $\cos f + k \sin f \cos g$

évanouiſſe. Poſons donc g, ou l'angle $ZAM = 180°$, pour avoir $\sin g = 0$, & $\cos g = -1$; & nous trouverons $\tang f = \frac{1}{k} = \frac{m \sin a}{n - m \cos a}$: d'où nous connoiſſons l'arc $AM = f$; & alors ce point M conſervera toujours la même diſtance au pole P, & ſe trouvera dans l'arc ZP prolongé, lorsque f a une valeur poſitive.

Pour la terre cette diſtance f évanouït presque tout à fait. Car, puisque dans l'intervalle d'un jour la terre fait une révolution entiere, & le pole n'avance dans un ſens contraire que par un angle $= \frac{51}{365}$ ſecondes, nous aurons $n : m = 360° : \frac{-51''}{365}$, ou $\frac{n}{m} = \frac{-60.60.360.365}{51}$ ou $\frac{n}{m} = -92816{,}47$. Donc, puisque $a = 23°, 29'$, nous aurons $\tang f = \frac{-0{,}3984}{92816{,}47}$, & $f = -\frac{1}{112}$ ſeconde. Puisque cette différence eſt imperceptible, on peut ſans aucune erreur regarder ce point comme le vrai pole de la terre.

Comme l'exiſtence d'un tel axe qui accompagne toujours également le vrai pole, a lieu dans l'hypotheſe, que le pole avance uniformement dans un petit cercle, & que la planete conſerve toujours la même viteſſe de rotation, il ſera important d'examiner, en quelles autres hypotheſes un tel axe puiſſe auſſi exiſter. Pour cet effet nous n'avons qu'à ſuppoſer conſtamment $x = f$, & $y = g$, afin que le point M nous montre cet axe. Alors nos premieres équations nous fourniſſent

$$dp \cos g - dq \sin p \sin g = 0 \quad \& \quad v\,dt = dq \cos p - \frac{dp \sin g - dq \sin p \cos g}{\tang f}$$

d'où

d'où nous tirons $dq = \frac{dp \cos g}{\sin g \sin p}$, & de là

$$v\,dt = \frac{dp \cos g \cos p}{\sin g \sin p} - \frac{dp}{\tang f \sin g}.$$

Ou bien il faut 1°. que $\frac{dq \sin p}{dp}$ ſoit une quantité conſtante, & 2°, que $\frac{dq \cos p}{dp} - \frac{v\,dt}{dp}$ ſoit auſſi une quantité conſtante, ſavoir la premiere égale à $\frac{\cos g}{\sin g}$, & la ſeconde à $\frac{1}{\tang f \sin g}$. Quand un tel rapport entre le mouvement du pole & celui de rotation n'a pas lieu, il eſt douteux ſi le mouvement de la planete peut être réduit à un certain axe, comme dans ce cas. Car, s'il arrivoit, par exemple, que pendant que le pole marche uniformement dans un petit cercle, le mouvement de rotation devint ſubitement plus rapide, il eſt clair qu'après cette accélération l'axe de rotation ſeroit différent de celui qui auroit eu lieu auparavant, & que la planete n'auroit pas un axe fixe, dans le ſens auquel on eſt accoutumé de ſe l'imaginer.

Par ce que je viens d'expoſer, on comprend que c'eſt un probleme extrémement difficile, que de déterminer le mouvement de rotation d'une planete, quoiqu'on connoiſſe pour chaque tems le point du Ciel, autour duquel elle tourne avec la viteſſe de rotation. La ſolution dépend de l'intégration de deux équations différentielles, qui paroit extrémement difficile. Conſidérons plus ſoigneuſement les deux premieres, & poſant pour abréger,

$$-v + \frac{dq \cos p}{dt} = \mathrm{L};\ \frac{dp}{dt} = \mathrm{M}\ \&\ \frac{dq \sin p}{dt} = \mathrm{N}$$

de ſorte que L, M, & N, ſoient des fonctions du tems t, & nos deux équations pour déterminer les inconnues $\mathrm{PV} = x$ & $\mathrm{ZPV} = y$ ſeront.

dx

$dx = M\,dt\,\cos y - N\,dt\,\sin y$; $dy = L\,dt - \dfrac{M\,dt\,\sin y - N\,dt\,\cos y}{\text{tang } x}$

ou $dy \sin x = L\,dt \sin x - M\,dt \cos x \sin y - N\,dt \cos x \cos y$

d'où nous tirons les deux combinaiſons ſuivantes,

$dx \cos x \sin y + dy \sin x \cos y = L\,dt \sin x \cos y - N\,dt \cos x = d.\sin x \sin y$

$dx \cos x \cos y - dy \sin x \sin y = M\,dt \cos x - L\,dt \sin x \sin y = d.\sin x \cos y$.

Pour dégager ces formules des ſinus & coſinus, poſons $\sin x \sin y = r$ & $\sin x \cos y = s$, d'où nous tirons $\sin x^2 = rr + ss$ & $\cos x = \sqrt{(1 - rr - ss)}$, & nous obtiendrons les deux équations ſuivantes

$$dr = L\,s\,dt - N\,dt\,\sqrt{(1 - rr - ss)}$$

$$ds = -L\,r\,dt + M\,dt\,\sqrt{(1 - rr - ss)}$$

Voilà donc deux équations différentielles ordinaires, dont il faut chercher la réſolution; ce qui eſt un objet de la pure analyſe. Puiſque la réſolution générale eſt aſſujettie à de fort grandes difficultés, il ſera important de remarquer un cas aſſès général, où l'on peut achever l'intégration. Car, en combinant ces dernieres équations, on aura

$$M\,dr + N\,ds + L\,N\,r\,dt - L\,M\,s\,dt = 0.$$

Soit pour abréger $L\,dt = d\theta$; & le cas que j'ai en vüe aura lieu, lorsque $M = N \text{ tang } \theta$, ou $\int L\,dt = A \text{ tang. } \dfrac{M}{N}$. Poſons donc $M = T \sin \theta$, & $N = T \cos \theta$, de ſorte que $T = \sqrt{(MM + NN)}$, & la derniere équation prendra cette forme:

$$dr \sin \theta + ds \cos \theta + r\,d\theta \cos \theta - s\,d\theta \sin \theta = 0$$

dont l'intégrale eſt évidemment

$$r \sin \theta + s \cos \theta = \text{Conſt.} = \sin \gamma.$$

Donc $s = \dfrac{\sin \gamma - r \sin \theta}{\cos \theta}$; laquelle valeur étant ſubſtituée dans la premiere donne

$dr \cos$

$dr\,\mathrm{cof}\theta + rd\theta\,\mathrm{fin}\theta - d\theta\,\mathrm{fin}\gamma + \mathrm{T}dt\,\mathrm{cof}\theta\sqrt{(\mathrm{cf}\theta^2 - \mathrm{fin}\gamma^2 + 2r\,\mathrm{fin}\gamma\,\mathrm{fin}\theta - rr)} = 0.$

Poſons $r = u\,\mathrm{cof}\theta + \mathrm{fin}\gamma\,.\mathrm{fin}\theta$ pour avoir

$du\,\mathrm{cof}\theta^2 + \mathrm{T}dt\,\mathrm{cof}\theta\sqrt{(\mathrm{cf}\theta^2 - \mathrm{fin}\gamma^2 + \mathrm{fin}\gamma^2\,\mathrm{fin}\theta^2 - uu\,\mathrm{cof}\theta^2)} = 0$

& en diviſant par $\mathrm{cof}\theta^2$

$$du + \mathrm{T}dt\sqrt{(\mathrm{cof}\gamma^2 - uu)} = 0 \text{ ou } \frac{du}{\sqrt{(\mathrm{cof}\gamma^2 - uu)}} + \mathrm{T}dt = 0.$$

Donc $\mathrm{A\,fin}\,\frac{u}{\mathrm{cof}\gamma} + \int \mathrm{T}dt = 0.$

Soit $\int \mathrm{T}dt = \odot$, & ayant $u = -\mathrm{cof}\gamma\,\mathrm{fin}\odot$, on aura $r = \mathrm{fin}\gamma\,\mathrm{fin}\theta - \mathrm{cof}\gamma\,\mathrm{cof}\theta\,\mathrm{fin}\odot$, & $s = \mathrm{fin}\gamma\,\mathrm{cof}\theta + \mathrm{cof}\gamma\,\mathrm{fin}\theta\,\mathrm{fin}\odot$. Donc $\mathrm{fin}\,x = \sqrt{(\mathrm{fin}\gamma^2 + \mathrm{cof}\gamma^2\,\mathrm{fin}\odot^2)}$ & $\mathrm{cof}\,x = \mathrm{cof}\gamma\,\mathrm{cof}\odot$. Enfin $\mathrm{tang}\,y = \frac{\mathrm{tang}\,\gamma\,\mathrm{tang}\,\theta - \mathrm{fin}\odot}{\mathrm{tang}\,\gamma + \mathrm{tang}\,\theta\,\mathrm{fin}\odot}$: d'où l'on tire evidemment

$$y = \theta - \mathrm{A\,tang}\,\frac{\mathrm{tang}\,\gamma}{\mathrm{fin}\odot}.$$

Donc, prenant $\odot = \mathrm{C} + \int dt\,\sqrt{(\mathrm{MM} + \mathrm{NN})}$, toutes les fois que $\int \mathrm{L}dt = \mathrm{A\,tang}\,\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}}$, les deux inconnues x & y ſe déterminent en ſorte:

$$\mathrm{cof}\,x = \mathrm{cof}\gamma\,\mathrm{cof}\odot \;\&\; y = \mathrm{A\,tang}\,\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}} - \mathrm{A\,tang}\,\frac{\mathrm{fin}\odot}{\mathrm{tang}\,\gamma}.$$

Ce cas intégrable nous mene encore à quelques autres. Car poſons $\sqrt{(1 - rr - ss)} = u$, pour avoir ces deux équations

I. $dr - \mathrm{L}sdt + \mathrm{N}udt = 0$
II. $ds - \mathrm{M}udt + \mathrm{L}rdt = 0$

& puiſque $-rdr - sds = udu$, nous en tirons cette troiſieme ſemblable aux précédentes:

III. $du - \mathrm{N}rdt + \mathrm{M}sdt = 0.$

Premier cas intégrable. Donc, puisque les deux premieres ont été intégrées dans le cas $\int L\,dt = A \operatorname{tang} \frac{M}{N}$, en ſorte que poſant

$$\int L\,dt = \theta \;\&\; \int dt \sqrt{(MM + NN)} = \Theta$$

nous en avons obtenu

$$r = \operatorname{ſin}\gamma \operatorname{ſin}\theta - \operatorname{coſ}\gamma \operatorname{coſ}\theta \operatorname{ſin}\Theta$$
$$s = \operatorname{ſin}\gamma \operatorname{coſ}\theta + \operatorname{coſ}\gamma \operatorname{ſin}\theta \operatorname{ſin}\Theta \quad \& \; u = \operatorname{coſ}\gamma \operatorname{coſ}\Theta$$

Second cas intégrable. La ſeconde avec la troiſieme admettra auſſi l'intégration dans le cas $\int M\,dt = A \operatorname{tang} \frac{N}{L}$, car poſant

$$\int M\,dt = \eta \quad \& \int dt \sqrt{(NN + LL)} = H$$

nous aurons

$$s = \operatorname{ſin}\xi \operatorname{ſin}\eta - \operatorname{coſ}\xi \operatorname{coſ}\eta \operatorname{ſin} H$$
$$u = \operatorname{ſin}\xi \operatorname{coſ}\eta + \operatorname{coſ}\xi \operatorname{ſin}\eta \operatorname{ſin} H \quad \& \; r = \operatorname{coſ}\xi \operatorname{coſ} H$$

Troiſieme cas intégrable. De la même maniere la troiſieme avec la premiere fournira une ſolution lorsque $\int N\,dt = A \operatorname{tang} \frac{L}{M}$. Alors poſant

$$\int N\,dt = \zeta \quad \& \int dt \sqrt{(LL + MM)} = \Sigma$$

nous aurons

$$u = \operatorname{ſin}\alpha \operatorname{ſin}\zeta - \operatorname{coſ}\alpha \operatorname{coſ}\zeta \operatorname{ſin}\Sigma$$
$$r = \operatorname{ſin}\alpha \operatorname{coſ}\zeta + \operatorname{coſ}\alpha \operatorname{ſin}\zeta \operatorname{ſin}\Sigma \quad \& \; s = \operatorname{coſ}\alpha \operatorname{coſ}\Sigma$$

où il faut remarquer que $\operatorname{coſ} x = u$ & $\operatorname{tang} y = \frac{r}{s}$; & outre cela:

$$L = -v + \frac{dq \operatorname{coſ} p}{dt}; \quad M = \frac{dp}{dt} \quad \& \; N = \frac{dq \operatorname{ſin} p}{dt}.$$

Le cas du milieu renferme celui où le pole ſe mouvoit dans un petit cercle uniformément, pendant que la rotation étoit auſſi uniforme; mais

mais il eſt infiniment plus général, d'où il mérite une attention particuliere. Or d'abord nous avons $\int M dt = c + p$, d'où la condition de ce cas $\frac{N}{L} = \text{tang} \int M dt$ donne

$$\frac{dq \sin p}{dq \cos p - v dt} = \text{tang}\,(c + p), \quad \& \text{ partant}$$

$$v dt = \frac{dq \cos p \,\text{tang}\,(c + p) - dq \sin p}{\text{tang}\,(c + p)} = \frac{dq \sin c}{\sin (c + p)}$$

d'où nous concluons $H = \int \frac{dq \sin p}{\sin (c + p)}$ à cauſe de $L = N \cot (c + p)$,

$\& \sqrt{(NN + LL)} = \frac{N}{\sin (p + c)}$. Par conſéquent notre ſolution ſera; poſant $\eta = p + c$,

$$\cos x = \sin \mathfrak{G} \cos \eta + \cos \mathfrak{G} \sin \eta \sin H.$$

$$\text{tang}\, y = \frac{\cos \mathfrak{G} \cos H}{\sin \mathfrak{G} \sin \eta - \cos \mathfrak{G} \cos \eta \sin H}$$

Nous avons rapporté jusqu'ici le mouvement du pole à un point fixe Z, qui dépend de notre volonté, ne changeant rien dans le mouvement même. Donc, ayant réuſſi à intégrer nos équations pour un certain point fixe Z, ſi l'on veut rapporter le mouvement à un autre point fixe quelconque, l'intégration doit également réuſſir, puisqu'elle découle de la précédente.

Délivrons nos recherches de la conſidération du point arbitraire Z; & puisque l'arc $PV = x$ n'en dépend point, poſons l'angle $VPp = z$, & nous aurons l'angle $ZPV = y = 90° + z + pPv$.

Or, poſant comme ci-deſſus $-v + \frac{dq \cos p}{dt} = L$; $\frac{dp}{dt} = M$;

& $\frac{dq \sin p}{dt} = N$, on aura $\sin p P v = \frac{M}{\sqrt{(MM + NN)}}$, &

$\cos p P v = \frac{}{\sqrt{(MM + NN)}}$, & $\text{tang}\, p P v = \frac{M}{N}$, & de là

$dy = dz + \frac{N dM - M dN}{MM + NN}$; & $\sin y = \frac{-M \sin z + N \cos z}{\sqrt{(M^2 + N^2)}}$,

& $\cos y = \frac{-N \sin z - M \cos z}{\sqrt{(M^2 + N^2)}}$.

Cela posé, puisque nos équations sont

$$dx = dt(M \cos y - N \sin y) \;\&\; dy = L dt - \frac{dt}{\text{tang}\, x}(M \sin y + N \cos y)$$

par ces substitutions elles seront changées en

$$dx = -dt \cos z \sqrt{(MM + NN)} \quad \&$$

$$dz \sin x = dt \cos x \sin z \sqrt{(MM + NN)} + L dt \sin x + \frac{(M dN - N dM) dt \sin x}{MM + NN}$$

Posons pour abréger:

$$\sqrt{(MM + NN)} = I \quad \& \quad L + \frac{M dN - N dM}{(MM + NN) dt} = K,$$

pour avoir

$dx + I dt \cos z = 0$ & $dz \sin x - I dt \cos x \sin z - K dt \sin x = 0$

Posons comme auparavant

$$\sin x \sin z = r; \quad \sin x \cos z = s \quad \& \quad \cos x = u,$$

& la combinaison fournira ces équations:

$$dr - K s dt = 0 \quad \& \quad ds + K r dt + I u dt = 0$$

où, puisque $rr + ss + uu = 1$, cette troisieme y peut être ajoutée: $au - I s dt = 0$; donc $I dr - K du = 0$.

Ici

Ici on peut remarquer auſſi trois cas intégrables:

1°. Si $I = o$, ce qui ne ſauroit avoir lieu, à moins qu'il ne fût $M = o$ & $N = o$. Alors on aura $u = c$; & $s = V(1 - cc - rr)$, donc $K\,dt = L\,dt = \frac{dr}{V(1 - cc - rr)}$, & partant

Aſn $\frac{r}{V(1 - cc)} = \int L\,dt = \theta$, poſant $\int L\,dt = \theta$. Enſuite $r = V(1 - cc).\,\text{ſn}\theta$; $s = V(1 - cc).\,\text{cof}\theta$; & $u = c$: ce qui eſt le cas du pole repoſant.

2°. Le ſecond cas ſeroit $K = o$, mais puisque le troiſieme le renferme, j'y paſſe dabord.

3°. Soit $K = mI$, & l'équation $dr - m\,du = o$ donne: $r = mu + n$; & $s = V(1 - uu - (mu + n)^2)$; d'où la troiſieme donne: $\int I\,dt\,V(1+mm) = \text{Aſn}\frac{u(1+mm)+mn}{V(1+mm-nn)}$: & de là $u = \frac{-mn}{1+mm} + \frac{V(1+mm-nn)}{1+mm}\,\text{ſn}\int I\,dt\,V(1+mm)$

$r = \frac{n}{1+mm} + \frac{mV(1+mm-nn)}{1+mm}\,\text{ſn}\int I\,dt\,V(1+mm)$

& $s = \frac{V(1+mm-nn)}{V(1+mm)}\,\text{cof}.\int I\,dt\,V(1+mm)$.

Ce troiſième cas a donc lieu ſous cette condition:

$$L\,dt = \frac{N\,dM - M\,dN}{MM+NN} + m\,dt\,V(MM+NN),$$

ou $\int L\,dt = A\,\text{tang}\,\frac{M}{N} + m\int dt\,V(MM+NN)$;

d'où, ſi $m = 0$, réſulte le premier des cas précédens; mais ſi m eſt une quantité conſtante quelconque, ces cas intégrables ſeront différens des précédens.

On pourra trouver encore d'autres cas intégrables en poſant $y = z + T$, prenant pour T une fonction quelconque du tems t; alors, faiſant cette ſubſtitution, on aura

$$dx = dt \cos z (M \cos T - N \sin T) - dt \sin z (M \sin T + N \cos T)$$

$$dz \sin x = (L dt - d T) \sin x - dt \cos x \sin z (M \cos T - N \sin T) - dt \cos z (M \sin T + N \cos T)$$

& de là poſant $\sin x \sin z = r$; $\sin x \cos z = s$ & $\cos x = u$, de ſorte que $rr + ss + uu = 1$, on tirera ces trois équations:

I. $dr - s (L dt - d T) + u dt (M \sin T + N \cos T) = 0$

II. $ds - u dt (M \cos T - N \sin T) + r (L dt - d T) = 0$

III. $du - r dt (M \sin T + N \cos T) + s dt (M \cos T - N \sin T) = 0$

qui étant ſemblables aux trois ſupérieures, en poſant $L - \frac{dT}{dt}$; $M \sin T + N \cos T$ & $M \cos T - N \sin T$, au lieu de L, N & M, les trois cas intégrables ſeront:

1°. Si $\int L dt = A \operatorname{tang} \frac{M}{N}$ comme ci-deſſus.

2°. Si $\int dt (M \cos T - N \sin T) = A \operatorname{tang} \frac{dt (M \sin T + N \cos T)}{L dt - d T}$

3°. Si $\int dt (M \sin T + N \cos T) = A \operatorname{tang} \frac{L dt - d T}{dt (M \cos T - N \sin T)}$

Or outre cela, ſi $\operatorname{tang} T = \frac{\beta M - \alpha N}{\alpha M + \beta N}$, on pourra trouver l'intégrale comme ci-deſſus, ſi

$$\int L dt = A \operatorname{tang} \frac{M}{N} + \gamma \int dt \sqrt{(MM + NN)}$$

Tant

Tant de cas intégrables devroient bien enfin mener à l'intégration générale.

Or on peut encore trouver plusieurs autres cas, comme on verra par le probleme suivant:

PROBLEME

Les lettres L, M & N marquant des fonctions quelconques de la variable t, & x, y, z étant des quantités inconnues, en sorte que $xx + yy + zz = 1$, trouver les conditions des fonctions L, M & N, qui rendent intégrables ces trois équations:

I. $dx - Lydt + Nzdt = 0$

II. $dy - Mzdt + Lxdt = 0$

III. $dz - Nxdt + Mydt = 0$

dont deux renferment déjà la troisieme.

SOLUTION

Nous avons déjà vu trois cas où l'intégration a lieu, qui sont

1°. si $\int L dt = A \operatorname{tang} \frac{M}{N}$; 2°. si $\int M dt = A \operatorname{tang} \frac{N}{L}$; 3°. si $\int N dt = A \operatorname{tang} \frac{L}{M}$.

Donc, quand nous pourrons trouver des substitutions, qui changent les trois équations proposées en d'autres d'une forme semblable, celles-ci nous fourniront de nouvelles conditions d'intégrabilité.

Posons $x = x' \cos P - y' \sin P$ & $y = x' \sin P + y' \cos P$, afin que $xx + yy = x'x' + y'y'$, & les deux premieres équations seront changées en celles-ci.

$$dx' \cos P - dy' \sin P - x' dP \sin P - y' dP \cos P + Nzdt = 0$$
$$- Lx' dt \sin P - Ly' dt \cos P$$

$$dx' \sin P + dy' \cos P + x' dP \cos P - y' dP \sin P - Mzdt = 0$$
$$+ Lx' dt \cos P - Ly' dt \sin P$$

dont

dont la combinaiſon fournit celles-ci:

$$dx' - y'(dP + L\,dt) + z\,dt\,(N\cos P - M\sin P) = 0$$
$$dy' - z\,dt\,(N\sin P + M\cos P) + x'(dP + L\,dt) = 0$$
$$dz - x'\,dt\,(N\cos P - M\sin P) + y'\,dt\,(N\sin P + M\cos P) = 0$$

dont les trois cas intégrables ſeront:

$$\int L\,dt + P = A\,\text{tang}\,\frac{N\sin P + M\cos P}{N\cos P - M\sin P} = A\,\text{tang}\,\frac{M}{N} + P$$

$$\int dt\,(N\sin P + M\cos P) = A\,\text{tang}\,\frac{N\cos P - M\sin P}{L\,dt + dP}\,dt$$

$$\int dt\,(N\cos P - M\sin P) = A\,\text{tang}\,\frac{L\,dt + dP}{(N\sin P + M\cos P)\,dt}$$

dont le premier eſt déja compris dans les précédens.

Si nous changeons ſemblablement les variables y & z, nous trouverons ces cas:

$$\int dt\,(L\sin Q + N\sin Q) = A\,\text{tang}\,\frac{L\cos Q - N\sin Q}{M\,dt + dQ}\,dt$$

$$\int dt\,(L\cos Q - N\sin Q) = A\,\text{tang}\,\frac{M\,dt + dQ}{(L\sin Q + N\cos Q)\,dt}$$

Outre cela un pareil changement dans les deux variables z & x fournira ces conditions:

$$\int dt\,(M\sin R + L\cos R) = A\,\text{tang}\,\frac{M\cos R - L\sin R}{N\,dt + dR}\,dt$$

$$\int dt\,(M\cos R - L\sin R) = A\,\text{tang}\,\frac{N\,dt + dR}{(M\sin R + L\cos R)\,dt}$$

Si

Si nous regardons les trois équations dérivées comme les principales, de ſorte qu'au lieu des lettres L, M & N, nous ayons à préſent

$$L + \frac{dP}{dt}; \quad M \cos P + N \sin P \quad \& \quad N \cos P - M \sin P,$$

nous en tirerons encore les quatre conditions ſuivantes

$$\int dt\left(L\sin Q + \frac{dP}{dt}\sin Q + N\cos P\cos Q - M\sin P\cos Q\right) = A\,\text{tang}\frac{L\cos Q + \frac{dP}{dt}\cos Q - N\cos P\sin Q + M\sin P\sin Q}{M\cos P + N\sin P + \frac{dQ}{dt}}$$

$$\int dt\left(L\cos Q + \frac{dP}{dt}\cos Q - N\cos P\sin Q + M\sin P\sin Q\right) = A\,\text{tang}\frac{M\cos P + N\sin P + \frac{dQ}{dt}}{L\sin Q + \frac{dP}{dt}\sin Q + N\cos P\cos Q - M\sin P\cos Q}$$

$$\int dt\left(M\cos P\sin R + N\sin P\sin R + L\cos R + \frac{dP}{dt}\cos R\right) = A\,\text{tang}\frac{M\cos P\cos R + N\sin P\cos R - L\sin R - \frac{dP}{dt}\sin R}{N\cos P - M\sin P + \frac{dR}{dt}}$$

$$\int dt\left(M\cos P\cos R + N\sin P\cos R - L\sin R - \frac{dP}{dt}\sin R\right) = A\,\text{tang}\frac{N\cos P - M\sin P + \frac{dR}{dt}}{M\cos P\sin R + N\sin P\sin R + L\cos R + \frac{dP}{dt}\cos R}$$

De ces quatre conditions on peut encore former deux fois quatre nouvelles, en mettant pour les trois lettres L, M, N, les mêmes dans cet ordre M, N, L, ou dans celui-ci N, L, M. Enſuite, pour ces mêmes lettres dans ces dernieres formules, on peut écrire

$$L + \frac{dS}{dt}; \quad M\cos S + N\sin S; \quad N\cos S - M\sin S,$$

ou bien $M + \frac{dS}{dt}$; $N \cos S + L \sin S$; $L \cos S - N \sin S$;

ou encore $N + \frac{dS}{dt}$; $L \cos S + M \sin S$; $M \cos S - L \sin S$;

& cela encore en changeant l'ordre de ces quantités, de sorte que le nombre de telles formules peut être multiplié à l'infini, en mettant toujours dans les formules dernierement trouvées pour les lettres L, M, N, ces nouvelles valeurs. Par ce moyen on parviendra à des ordres plus compliqués, qui contiendront un angle arbitraire de plus, comme sont P, Q, R, S; lesquels pouvant être pris à volonté, la multitude des cas qui admettent l'intégration, est tout à fait inconcevable; ce qui est d'autant plus remarquable, que généralement, sans supposer une certaine rélation entre les quantités L, M & N, il ne paroit point de méthode qui puisse conduire à l'intégration. C'est un sujet qui semble tout à fait nouveau dans l'Analyse, & qui pourra donner occasion à quantité de belles découvertes.

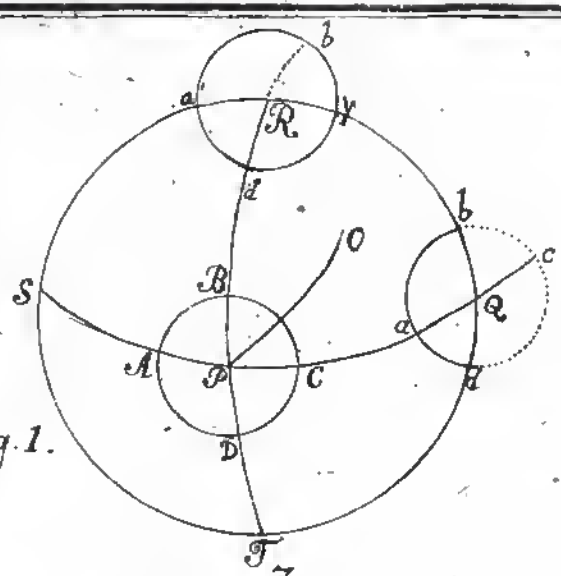

Fig. 1.

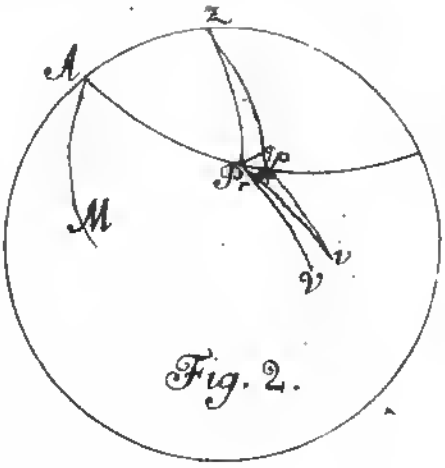

Fig. 2.

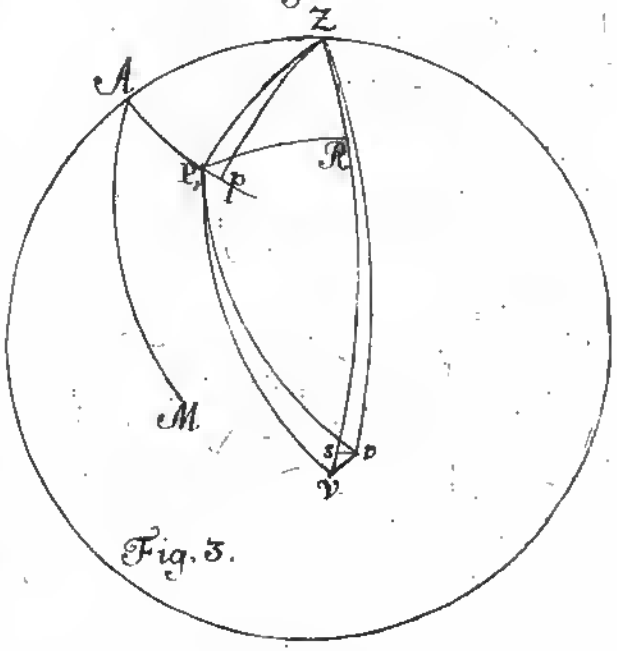

Fig. 3.